

機械力学 2 回目演習回答

1. 円板

$$z \text{ 軸} : I_z = \int_0^a 2\pi r \cdot dr \cdot \rho \cdot r^2 = 2\pi\rho \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

ここで、 $\pi a^2 \rho = \frac{W}{g}$ より、

$$I_z = \frac{W}{g} \cdot \frac{a^2}{2}$$

x 軸 : 直行軸の定理より、 $I_z = I_x + I_y$ 、図形の対称性より、 $I_x = I_y$ 、よって

$$I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{W}{g} \cdot \frac{a^2}{4}$$

x_1 軸 : 平行軸の定理より、 $I_{x_1} = I_x + \frac{W}{g} a^2 = \frac{W}{g} \cdot \frac{5a^2}{4}$

2. 円柱

$$z \text{ 軸} : I_z = \frac{\pi\rho a^4}{2} \cdot h$$

ここで、 $\pi\rho a^2 h = \frac{W}{g}$ より、

$$I_z = \frac{W}{g} \cdot \frac{a^2}{2}$$

x 軸 : x 軸から、 z 離れた位置での薄板の慣性モーメントは、

$$I_x = \frac{\pi\rho}{4} a^4 + \pi a^2 \rho z^2$$

上式を z 軸に沿って積分すると円柱の x 軸に関する慣性モーメント

$$I_x = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\pi\rho}{4} a^4 + \pi a^2 \rho z^2 \right) dz = \frac{\pi\rho a^4 h}{4} + \frac{\pi\rho a^2 h^3}{12}$$

$\pi\rho a^2 h = \frac{W}{g}$ より、

$$I_x = \frac{3a^2 + h^2}{12} \cdot \frac{W}{g}$$

x_1 軸：平行軸の定理により、

$$I_{x_1} = \frac{3a^2 + h^2}{12} \cdot \frac{W}{g} + \frac{W}{g} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3a^2 + 4h^2}{12} \cdot \frac{W}{g}$$

3. 平板

$$x \text{ 軸} : I_x = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} \rho a y^2 dy = \frac{\rho a b^3}{12}$$

ここで、 $ab\rho = \frac{W}{g}$ なので、

$$I_x = \frac{b^2}{12} \cdot \frac{W}{g}$$

$$x_1 \text{ 軸} : I_{x_1} = I_x + \frac{W}{g} \cdot \frac{b^2}{4} = \frac{b}{3} \cdot \frac{W}{g}$$

$$z \text{ 軸} : I_z = I_x + I_y、$$

$$I_y \text{ は } x \text{ 軸との相似性より } I_y = \frac{a^2}{12} \cdot \frac{W}{g}$$

よって

$$I_z = \frac{a^2 + b^2}{12}$$

2.

$$\text{半径 } R_1 \text{ の円盤の慣性モーメント} : I_{R_1} = \frac{\pi \rho R_1^4 H}{2}$$

$$\text{半径 } R_2 \text{ の円盤の慣性モーメント} : I_{R_2} = \frac{\pi \rho R_2^4 H}{2}$$

$$\text{半径 } R_3 \text{ の円盤の慣性モーメント} : I_{R_3} = \frac{\pi \rho R_3^4 H}{2}$$

$$\text{平行軸の定理より、} I = I_{R_1} - \left\{ (I_{R_2} + L_1^2 \cdot \pi \rho R_2^2 H) + (I_{R_3} + L_2^2 \cdot \pi \rho R_3^2 H) \right\}$$

3.

(1)

$$\text{タイヤの慣性モーメント} : I_t = \int_r^R 2\pi \rho_t W r^3 dr = \frac{\pi \rho_t W}{2} (R^4 - r^4)$$

$$\text{ホイールの慣性モーメント} : I_w = \int_0^r 2\pi\rho_w W r^3 dr = \frac{\pi\rho_w W}{2} r^4 = 2\pi\rho_t W r^4$$

$$\text{タイヤ+ホイールの慣性モーメント} : I_t + I_w = \frac{\pi\rho_t W}{2} (R^4 + 3r^4)$$

(2)

$$\text{回転方向の運動方程式} : I\ddot{\theta} = -FR \quad (1)$$

$$\text{並進方向の運動方程式} : m\dot{v} = F + mg \sin \alpha \quad (2)$$

$$\text{すべりなし} : = R\dot{\theta} \quad (3)$$

式 (1) ~ (3) より、

$$\ddot{\theta} = \frac{mg \sin \alpha}{mR + \frac{I}{R}} \quad (4)$$

式 (4) を積分して、 $t=0$ で $\theta=0$ とすると

$$\dot{\theta} = \frac{mg \sin \alpha}{mR + \frac{I}{R}} t \quad (5)$$

タイヤのみの場合、

$$m = m_t = \pi\rho_t (R^2 - r^2)H \quad (6)$$

$$I = I_t = \frac{\pi\rho_t W}{2} (R^4 - r^4) \quad (7)$$

タイヤ+ホイールの場合、

$$m = m_{t+w} = \pi\rho_t (R^2 - r^2)H + 4\rho_t \pi r^2 H = \pi\rho_t (R^2 + 3r^2)H \quad (8)$$

$$I = I_t + I_w = \frac{\pi\rho_t W}{2} (R^4 + 3r^4) \quad (9)$$

式 (6)、(7) および式 (8)、(9) を式 (5) に代入し、比較すると、式 (5) の t の係数は、タイヤ+ホイールの場合がタイヤのみの場合に比べて大きくなる。よって、タイヤ+ホイールの方が速度が大きくなる (加速度が大きくなる。)