機械力学２回目課題回答

１．棒の慣性モーメント

x 軸

$$I_x = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{W}{gl} x^2 dx = \frac{Wl^2}{12g}$$

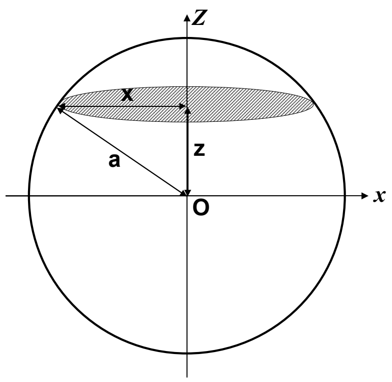
x_1 軸

$$I_z = I_x + \frac{W}{gl}(\frac{l}{2})^2 = \frac{Wl^2}{3g}$$

z 軸

$$I_z = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{W}{gl} x^2 dz = \frac{Wl^2}{12g}$$

球の慣性モーメント



z 軸

球の原点OからZ軸方向にzの位置での球の断面を上図のように考えると，断面の円の半径xに関して，次のような式が成り立つ

$$x^2 = a^2 - z^2 \qquad （１）$$

z 位置における円盤のx軸に関する慣性モーメントは，

$$\frac{1}{2}(\pi\rho x^2 dz)x^2 \qquad （２）$$

式（１）を式（２）に代入し，

$$\frac{1}{2}\pi\rho(a^2 - z^2)^2 dz \qquad （３）$$

球のx軸関する慣性モーメントは式（２）を積分すればよい

$$I_z = 2\int_0^a \frac{1}{2}\pi\rho(a^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 \qquad （４）$$

ここで，$\rho = \dfrac{W}{g}\dfrac{3}{4\pi a^3}$ を式（４）に代入すると

$$I_z = \frac{W}{g}\frac{2a^2}{5} \qquad （５）$$

x 軸

球の対象性により，

$$I_x = I_z = \frac{W}{g}\frac{2a^2}{5} \qquad （６）$$

x_1 軸

平行軸の定理より

$$I_{x_1} = I_x + \frac{W}{g}a^2 \qquad （７）$$

$$I_{x_1} = \frac{W}{g}\frac{7a^2}{5} \qquad （８）$$

２．（２－１）

球の回転に関する運動方程式は、

$$I_G\ddot{\theta} = Fr \qquad （１）$$

$$I_G = \frac{2mr^2}{5} \qquad （２）$$

$$\frac{2mr^2}{5}\ddot{\theta} = Fr \qquad （３）$$

並進方向の運動方程式は、斜面に沿って x 軸を取ると、

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F \qquad （４）$$

（２－２）

滑りのない条件では $x = r\theta$ 、（２）に代入して、

$$mr\ddot{\theta} = mg\sin\alpha - F \qquad （５）$$

式（３）、（５）より $\ddot{\theta}$ を消去し整理すると、

$$F = \frac{2}{7} mg \sin\alpha \qquad （６）$$

滑らない条件は、$F < \mu mg \cos\alpha$ （７）

よって

$$\tan\alpha < \frac{7\mu}{2} \qquad （８）$$

（２－３）

$F = \mu' mg \cos\alpha$ となり、式（３）、（４）は、

$$\frac{2mr^2}{5}\ddot{\theta} = \mu' mgr \cos\alpha \qquad （９）$$

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu' mg \cos\alpha \qquad （１０）$$

$t = 0$ で、$\dot{x} = 0$ 、$\dot{\theta} = 0$ とすると、

$$\dot{\theta} = \frac{5\mu' g \cos\alpha}{2r} t \qquad （１１）$$

$$\dot{x} = (g\sin\alpha - \mu' g\cos\alpha)t \qquad （１２）$$

となり、滑り速度は、$v = \dot{x} - r\dot{\theta}$ となり、

$$v = (g\sin\alpha - \frac{7}{2}\mu' g\cos\alpha)t \qquad （１３）$$