振動波動学　第二回　演習解答

1.

物体のそれぞれの運動方程式は，

$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$，　$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1)$

$x_1 = X_1 e^{iwt}$，　$x_2 = X_2 e^{iwt}$ とおき，方程式を解くと

$w = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$，　$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\therefore \xi_1 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$，　$\xi_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2)$

2.

（1）翼の質量を m，重心 C 回りの慣性モーメントを I_G とする．

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{x} - L\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \quad , \qquad U = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_\theta \theta^2$$

（2）ラグランジュの方程式より，

$$m\left(\ddot{x} - L\ddot{\theta}\right) + k_x x = 0 \quad , \qquad -mL\left(\ddot{x} - L\ddot{\theta}\right) + I_G\ddot{\theta} + k_\theta \theta = 0$$

よって　$M = \begin{pmatrix} m & -mL \\ -mL & I_G + mL^2 \end{pmatrix}$　，$K = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_\theta \end{pmatrix}$

（3）$x = A\sin\omega t$，$\theta = B\sin\omega t$ とおいて上記の運動方程式に代入し，整理する．ここで，AとBが0でない解を持つためには係数行列が0で無ければならない．

よって，

$$\left.\begin{matrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{\left(I_G + mL^2\right)k_x + mk_\theta \pm \sqrt{\left\{\left(I_G + mL^2\right)k_x + mk_\theta\right\}^2 - 4mI_G k_x k_\theta}}{2mI_G}}$$

（4）一次固有モードの振幅比は，$r_1 = \left(\dfrac{B}{A}\right)_1 = \dfrac{k_x - m{\omega_1}^2}{-mL{\omega_1}^2}$

二次固有モードの振幅比は，$r_2 = \left(\dfrac{B}{A}\right)_2 = \dfrac{k_x - m{\omega_2}^2}{-mL{\omega_2}^2}$

3.

（1）運動エネルギーは$T=\frac{1}{2}M\dot{x}_1{}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2{}^2$

ポテンシャルエネルギーは$U=\frac{1}{2}K(x_1-u)^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$

ラグランジュの方程式より，

$$M\ddot{x}_1+K(x_1-u)+k(x_2-x_1)=0$$
$$m\ddot{x}_2+k(x_2-x_1)=0$$

（2）（1）より，

$$M(\ddot{u}+\ddot{\delta}_1)+K\delta_1-k\delta_2=0$$
$$m(\ddot{u}+\ddot{\delta}_1+\ddot{\delta}_2)+k\delta_2=0$$

（3）

$$a_1=\frac{\{(M+m)k-Mm\omega^2\}\omega^2 A}{Mm\omega^4-\{mK+(M+m)k\}\omega^2+Kk}\quad,\quad a_2=\frac{mK\omega^2 A}{Mm\omega^4-\{mK+(M+m)k\}\omega^2+Kk}$$

（4） $a_1=0$ となれば良いので

$$k=\frac{Mm\omega^2}{M+m}$$

4.

並進運動　$m\ddot{x}+kx-kl\theta=0$

回転運動　$ml^2\ddot{\theta}-kxl+5kl^2\theta=0$

$x=Xe^{iwt}$，　$\theta=\Theta e^{iwt}$ とおき，方程式を解くと

$$w=\frac{\sqrt{10}\pm\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$w=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ のとき，固有モードは$\begin{pmatrix}1\\ \frac{-2-\sqrt{5}}{l}\end{pmatrix}$

$w=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ のとき，固有モードは$\begin{pmatrix}1\\ \frac{-2+\sqrt{5}}{l}\end{pmatrix}$